Les estimateurs *a posteriori* : des outils efficaces pour la simulation numérique en électromagnetisme

R. Tittarelli
Maison de la Simulation Lille 1
29 mars 2016

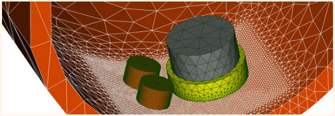
Directeur de thèse : Emmanuel Creusé (Laboratoire Paul Painlevé)
Co-directeur de thèse : Francis Piriou (L2EP)
Encadrants : Yvonnick Le Menach (L2EP) et Serge Nicaise (LAMAV)
Correspondants EDF : Jean-Pierre Ducreux (THEMIS)
et Olivier Boiteau (SINETICS)

Plan de la présentation

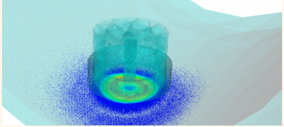
- ⋆ Contexte et problématique.
- ⋆ Développement mathématique des estimateurs.
- ⋆ Exemple d'application des estimateurs aux simulations.
- ⋆ Conclusions et perspectives.

Cadre général

⋆ EDF R&D et le L2EP (Laboratoire d'Electrotechnique et d'Electronique de Puissance) sont depuis 2006 réunis dans un laboratoire commun : le LAMEL (Laboratoire Avancé de Modélisation du Matériel Electrique).



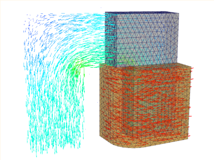
⋆ Au sein du LAMEL le code_CARMEL (Code Avancé en Modélisation Electromagnétique) est développé, outil utilisé par les ingénieurs pour la modélisation de systèmes électrotechniques.



Problématique

Problématique

Améliorer la qualité de la solution numérique du code_Carmel



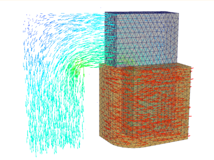
Dans le code_Carmel les équations de Maxwell sont approchées :

- en espace par la Methode des Éléments Finis (FEM)
- en temps par la Methode d'Euler Implicite

Problématique

Problématique

Améliorer la qualité de la solution numérique du code_Carmel



Dans le code_Carmel les équations de Maxwell sont approchées :

- en espace par la Methode des Éléments Finis (FEM)
- en temps par la Methode d'Euler Implicite

Comment estimer l'erreur entre les solutions $\underbrace{\text{analytique}}_{\text{inconnue}}$ et numérique ?

Problématique

Estimateurs d'erreur *a posteriori*.

- Quantitées totalement calculables à partir de la solution numérique et des données du problème.
- Quantitées qui se comportent *comme* l'erreur.

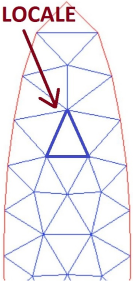
Problématique

Estimateurs d'erreur *a posteriori*.

- Quantitées totalement calculables à partir de la solution numérique et des données du problème.
- Quantitées qui se comportent *comme* l'erreur.

L'estimateur η doit être :

- FIABLE globalement : $\epsilon_{globale} \leq C_1 \, \eta_{global}$
- EFFICACE localement : $\eta_{local} \leq C_2 \, \epsilon_{locale}$ ($\rightsquigarrow$ adaptation maillage)



Problématique

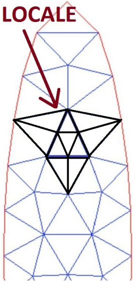
Estimateurs d'erreur *a posteriori*.

- Quantitées totalement calculables à partir de la solution numérique et des données du problème.
- Quantitées qui se comportent *comme* l'erreur.

L'estimateur η doit être :

- FIABLE globalement : $\epsilon_{globale} \leq \; C_1 \, \eta_{global}$
- EFFICACE localement : $\eta_{local} \; \leq \; C_2 \, \epsilon_{locale}$ ($\rightsquigarrow$ adaptation maillage)

$\Rightarrow$ équivalence erreur-estimateur : $C_3 \eta \leq \epsilon \leq C_1 \eta$



Problématique

Monographies

$\rightsquigarrow$ Verfürth (1996)
"A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques"
$\rightsquigarrow$ Ainsworth et Oden (2000)
"A posteriori error estimation in finite element analysis"
$\rightsquigarrow$ Monk (2003)
"Finite element methods for Maxwell's equations"

Problématique

Monographies

$\rightsquigarrow$ Verfürth (1996)
"A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques"

$\rightsquigarrow$ Ainsworth et Oden (2000)
"A posteriori error estimation in finite element analysis"

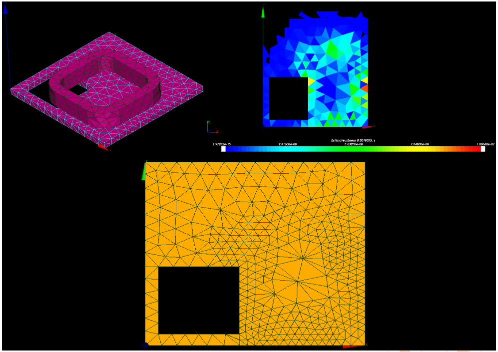
$\rightsquigarrow$ Monk (2003)
"Finite element methods for Maxwell's equations"

	Constantes explicites	Coût de calcul bas
Estimateur résiduel	$\times$	$\checkmark$
Estimateur équilibré	$\checkmark$	$\times$

Problématique

Objectifs

- Trouver un estimateur d'erreur η pour les formulations en potentiels des équations de Maxwell en magnétodynamique dans des régimes quasi-stationnaires approchées par Eléments Finis.
- Programmer l'estimateur η dans le *code_ Carmel* dans le but de mettre en place un algorithme de remaillage adaptatif.



Estimateur équilibré

Estimateur équilibré (magnétoharmonique)

Formulations résolues par le code_Carmel	Solution numérique
Formulation en potentiels $\mathbf{A}-\varphi$:	$(\mathbf{B}_h,\ \mathbf{E}_h)$
Formulation en potentiels $\mathbf{T}-\Omega$:	$(\mathbf{H}_h,\ \mathbf{J}_h)$

But : estimer $\underbrace{\text{l'erreur en } \mathbf{A}-\varphi}_{(\mathbf{B}-\mathbf{B}_h,\ \mathbf{E}-\mathbf{E}_h)}$ et $\underbrace{\text{l'erreur en } \mathbf{T}-\Omega}_{(\mathbf{H}-\mathbf{H}_h,\ \mathbf{J}-\mathbf{J}_h)}$

Estimateur équilibré

Estimateur équilibré (magnétoharmonique)

Lois de comportement au niveau continu :

$$\mathbf{B} = \mu\, \mathbf{H} \text{ et } \mathbf{J} = \sigma\, \mathbf{E}.$$

Estimateur basé sur la non-vérification des lois de comportement au niveau discret :

$$\eta^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta^2_{\text{magnétique},T} + \sum_{T \in \mathcal{T}_h, T \subset D_c} \eta^2_{\text{électrique},T},$$

où

$$\eta^2_{\text{magnétique},T} = ||\, \mu^{-1/2}(\mu\, \mathbf{H}_h - \mathbf{B}_h)\, ||^2_T$$

$$\eta^2_{\text{électrique},T} = ||\, (\omega\sigma)^{-1/2}\, (\mathbf{J}_h - \sigma \mathbf{E}_h)\, ||^2_T$$

Estimateur équilibré

Estimateur équilibré (magnétoharmonique)

Théorème : équivalence entre l'estimateur et l'erreur.

$$\eta = \epsilon + \text{termes d'ordre supérieur}\,.$$

Théorème : efficacité locale.

Pour chaque tétraèdre T du maillage $\mathcal{T}_h$, on a

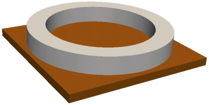
$$\eta_T \leq \sqrt{2}\;\epsilon_T + \text{termes d'ordre supérieur}\,.$$

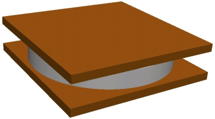
Simulations

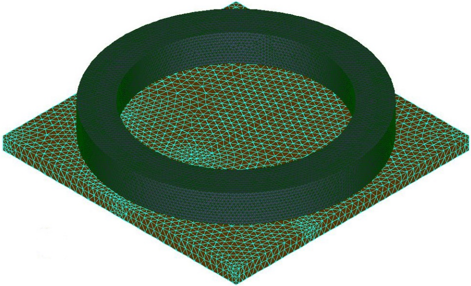
Cas test physique : bobine entre deux plaques conductrices

$\mu = 4\,\pi\,x\,10^{-7}\; H/m$ et $\sigma = 3.28\,x\,10^{7}\; S/m$

intensité du courant $1A$ et $f = 50Hz$

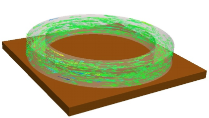


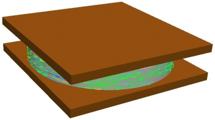


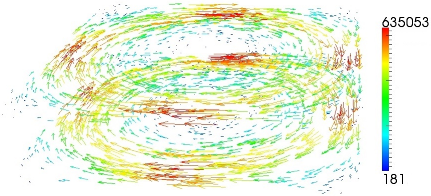


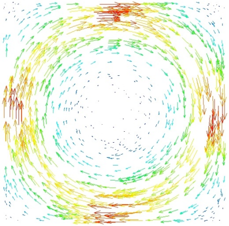
Simulations

Cas test physique : Courants induits



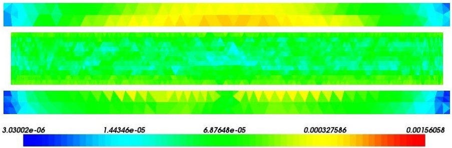


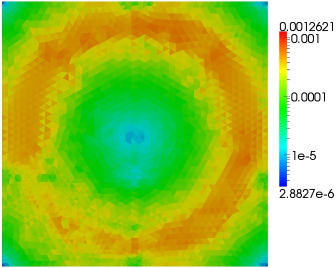


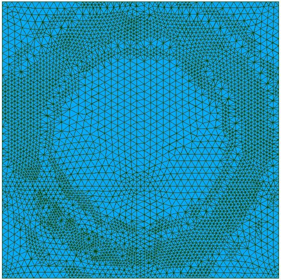


Simulations

Cas test physique : bobine entre deux plaques conductrices





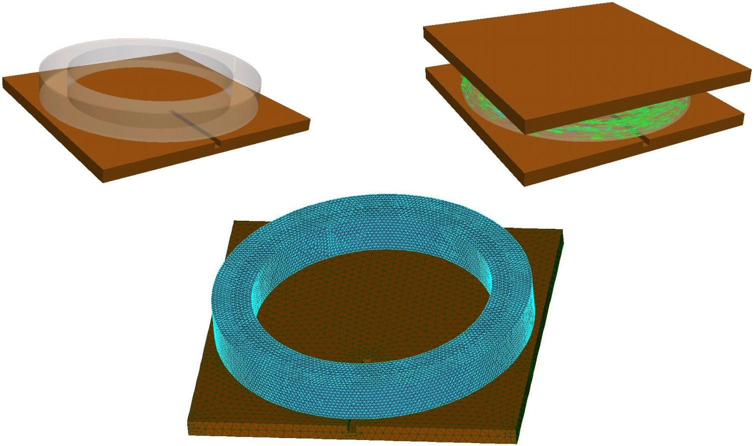


Simulations

Cas test physique : plaque avec rainure

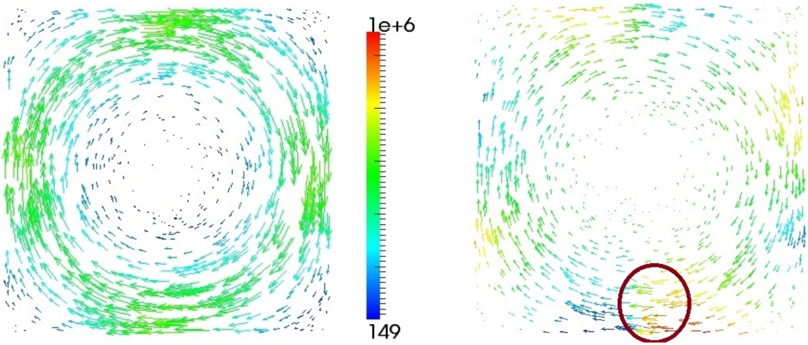
$\mu = 4\,\pi\,10^{-7}\ H/m$ et $\sigma = 3.28\,10^{7}\ S/m$

intensité du courant $1A$ et $f = 50Hz$



Simulations

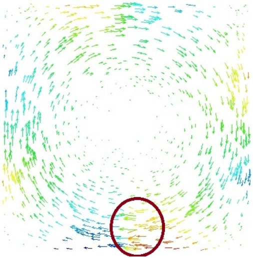
Cas test physique : Courants induits

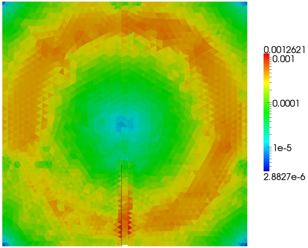


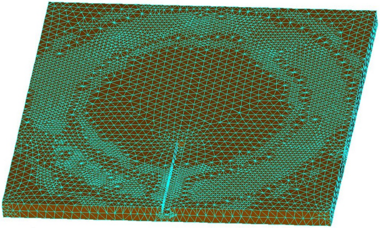
$\mathbf{J}_{\mathrm{ind}}$ sans rainure

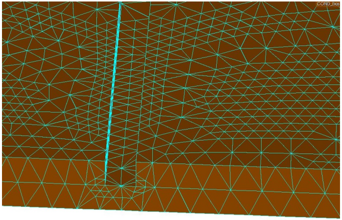
$\mathbf{J}_{\mathrm{ind}}$ avec rainure

Simulations









Diminution de l'estimateur dans la plaque du 21.7%

Conclusions et perspectives

Conclusions et perspectives

✓ Développement d'un estimateur équilibré pour les formulations $\mathbf{A} - \varphi$ et $\mathbf{T} - \Omega$ en régime harmonique :

- E. Creusé, S. Nicaise, R. Tittarelli, A guaranteed equilibrated error estimator for the $\mathbf{A} - \varphi$ and $\mathbf{T} - \Omega$ magnetodynamic harmonic formulations of the Maxwell system, *IMA Journal of Numerical Analysis*, submitted. ($\oplus$ HAL)

⋆ Pour des problèmes instationnaires on a développé un estimateur spatio-temporel $\rightsquigarrow$ adaptation en espace-temps, algorithmes adaptatifs en espace-temps.

⋆ Etudes numériques sur la performance des estimateurs et leurs industrialisation.

Conclusions et perspectives

Merci pour votre attention !